مستوى البراعة الرياضية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية

Level of Mathematical Proficiency of preparatory School Pupils

إعداد

الباحث/ اسلام حسن ابراهيم يوسف

إشراف

أ.د/ نادي كمال عزيز جرجس

أستاذ المناهج وطرق تدريس الرياضيات "المتفرغ"
كلية التربية - جامعة أسوان

د / طه على احمد على

أ.م.د/ محمد حسن عبدالشافي عبدالرحيم

مدرس المناهج وطرق تدريس
الرياضيات بكلية التربية - جامعة
سوهاج

أستاذ المناهج وطرق تدريس
الرياضيات المساعد بكلية التربية بقنا -
جامعة جنوب الوادي

(*بحث مستل من أطروحة رسالة دكتوراه لاستكمال متطلبات الحصول على درجة دكتوراه الفلسفة في التربية تخصص المناهج وطرق تدريس الرياضيات

مستوى البراعة الرياضياتية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية

أ. د/ نادي كمال عزيز أ.م.د/ محمد حسن عبدالشافي د/ طه على احمد أ/ اسلام حسن ابراهيم

مستخلص البحث

هدف البحث إلى تعرف مستوى البراعة الرياضياتية والمتمثلة في (الاستيعاب المفاهيمي - الطلاقة الإجرائية - الكفاءة الاستراتيجية - الاستدلال التكيفي - النزعة المنتجة) لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية، واستخدام البحث المنهج الوصفي، وتوصلت نتائج البحث إلى أن مستوى تلاميذ الصف الثانى بالمرحلة الإعدادية منخفض فى الاستيعاب المفاهيمي، والطلاقة الإجرائية، والكفاءة الاستراتيجية، والاستدلال التكيفي، والنزعة المنتجة. لذا يوصي البحث بضرورة تنمية البراعة الرياضياتية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية، وعقد دورات تدريبية لتدريب المعلمين قبل وفي أثناء الخدمة على تنمية البراعة الرياضياتية لدى تلاميذهم.

الكلمات المفتاحية: البراعة الرياضياتية - تلاميذ المرحلة الإعدادية.

Abstract

The aim of the research is to identify the mathematical proficiency level presented in “conceptual understanding, procedural fluency, adaptive reasoning, strategics competence and productive disposition” suitable for preparatory stage students. The researcher used the descriptive approach, The results of the research showed that the level of 2nd year preparatory stage students was low in conceptual understanding, procedural fluency, adaptive reasoning, strategics competence and productive disposition. The research also recommends that attention should be given to developing the mathematical proficiency components for preparatory stage students, and that training courses should be held to train teachers before and insurance on how to develop mathematical proficiency components and how they are developed for their students.

Key Words: Mathematical Proficiency skills.

مقدمة:

شهد العالم ثورة هائلة فى التقدم التكنولوجي والمعرفي أدت إلى تطور المعلومات وتلاحقها، مما يتطلب من التعليم والباحثين فى مجال التربية مواكبة هذه التغيرات وتوظيف المعلومات فى مجالات الحياة المختلفة وإعداد جيل قادر على التعامل مع ما يفرضه هذا التقدم من مشكلات وتحديات، والمناهج التعليمية المختلفة لها دور كبير فى إعداد هذا الجيل، وتعد الرياضيات من المناهج التعليمية التي تسهم فى تنمية القدرات العليا بجميع أشكالها لدى كل متعلم.

فالاهتمام بتطوير مناهج الرياضيات أصبح اليوم حاجة ملحة وليس ترفاً لكي تتجاوب مع معطيات هذا التطور السريع، والتعامل مع المعرفة فى أطر متكاملة، وجعل التلميذ يفكر عندما تواجهه مشكلة حياتية تفكيراً علمياً وموضوعياً، ويضيف حلولاً إبداعية لتلك المشكلات، ومن أجل ذلك فالحاجة اليوم أكثر من أي وقت مضى إلى تعليم وتعلم يمدنا بآفاق تعليمية واسعة ومتنوعة ومنقمة، تساعد طلابنا على القدرة على الكشف، والإبتكار، والقدرة على المهارة فى تنفيذ الإجراءات بمرونة ودقة وكفاءة، والقدرة على صياغة وتمثيل حل المشكلات الرياضية.

وفي مطلع القرن الحادي والعشرين قامت لجنة تعلم الرياضيات التابعة للمجلس الوطني الأمريكي للبحوث (NRC) بتحليل دراسات وأبحاث تربويات الرياضيات وأبحاث ودراسات في مجال علم النفس المعرفي، وتعلم الرياضيات التي يمكن تعلمها، وخبرة المعلمين والمتعلمين فيها. وبعد التوصل إلى ما يحتاجه المجتمع من المعرفة الرياضية والفهم والمهارات؛ خرجت بنظرة مركبة وشاملة لما يعنيه "النجاح في تعليم الرياضيات، واعتباره الهدف الرئيس من تعليم الرياضيات المدرسية وتعلمها في الصفوف التعليمية المختلفة، وهو ما أسمته البراعة الرياضية (Mathematical Proficiency)، وأشارت اللجنة إلى أن مصطلح

"البراعة الرياضياتية" يشمل كل جوانب الخبرة والكفاءة والمعرفة بالرياضيات، وهو يعبر عما تعنيه لأي فرد " أن يتعلم الرياضيات بنجاح " (NRC,2001,115- 116).

ولقد ظهر مصطلح البراعة الرياضياتية Mathematical Proficiency على يد كلباترك وزملائه (Kilpatrick, et al.,2001) ليدل على المهارة فى تنفيذ الإجراءات بمرونة ودقة عالية، واستيعاب المفاهيم والعمليات الرياضياتية، وذلك أثناء التفكير المنطقي والتأملي والتبرير وصياغة وتمثيل حل المشكلات الرياضياتية، حتى يصل المتعلم لرؤية الرياضيات كمادة مفيدة وذات قيمة ويكتسب الثقة فى استخدامها.

وقد تبنت عديد من الدول المتقدمة مكونات البراعة الرياضياتية ومنها سنغافورة منذ عام ٢٠٠٦ حيث قامت بمراجعة رياضيات المرحلة الابتدائية فى مكونات البراعة الرياضياتية (Ministry of Education, Singapore,2006,6) ، كما أشارت معايير الرياضيات المدرسية إلى أن جميع الطلاب قادرين على تعلم الرياضيات وينبغي إعطاؤهم الفرصة لتطوير البراعة الرياضياتية عالية المستوى (Harper, 2012). وكذا أوصى الفريق الاستشاري الوطني للرياضيات بالولايات المتحدة الأمريكية تبني مكونات البراعة الرياضياتية بهدف إعداد التلاميذ للقرن الحادي والعشرين (National Mathematics Advisory Panel, 2008).

ويأتي مفهوم البراعة الرياضياتية كمعيار رابع للتقويم الرياضياتي، كما أشارت الوثيقة الصادرة عن المجلس القومي لمعلمي الرياضيات في الولايات المتحدة الأمريكية NCTM ويعرفها بأنها امتلاك المتعلم للعمليات الرياضياتية، ومنها: التواصل والترابط والاستدلال الرياضياتي، وذلك بمستويات المعرفة الرياضياتية الثلاثة: المعرفة المفاهيمية، والمعرفة الإجرائية، والمعرفة المرتبطة بحل المشكلات ضمن المحتوى الرياضياتي، كما تتضمن ثقة التلميذ في قدرته الرياضية، واستعداده

للمثابرة أثناء حل المشكلات غير الروتينية، وتقديره لدور الرياضيات في الحياة وقيمتها كأداة نفعية (NCTM,2000).

ويشير Kilpatrick (٢٠٠١) إلى أن المتعلم ذا البراعة الرياضية يجب أن يكون قادرًا على:

- الاستيعاب المفاهيمي (Conceptual Understanding): ويقصد به فهم المفاهيم والعمليات والعلاقات الرياضية.

- الطلاقة الإجرائية (Procedural Fluency): ويقصد بها المهارة في تنفيذ الإجراءات بمرونة وبدقة وبشكل فعال وعلى نحو ملائم.

- الاستدلال التكيفي (Adaptive Reasoning): القدرة على التفكير المنطقي والتأملي والشرح والتفسير والتبرير.

- الكفاءة الاستراتيجية (Strategic Competence): القدرة على صياغة وتمثيل وحل المشكلات الرياضية.

- الرغبة المنتجة (Disposition Productive): ويقصد بها النظر إلى الرياضيات على أنها واقعية ومفيدة ومجدية.

وفي هذا السياق تعد تنمية البراعة الرياضية من أهم أهداف تدريس الرياضيات لدى التلاميذ، حتى يصبحوا أكفاء في تعلم الرياضيات على نحو متزايد؛ بحيث تمكنهم تلك الكفاءة من مواجهة التحديات الرياضية للحياة اليومية، وتمكنهم كذلك من مواصلة دراستهم للرياضيات؛ لأنها تضمن رغبة وجدانية منتجة نحو الرياضيات، تساعد التلاميذ على الاعتقاد بأنهم قادرون على فهم الرياضيات، والتمكن

من إجراءاتها، والمثابرة على حل المشكلات الرياضية والحياتية(حماده سعيد محمد وحمدى محمد مرسي وزكريا جابر حناوي، ٢٠٢٢)

ونظرًا لأهمية البراعة الرياضية كأحد المفاهيم الشاملة التي يجب تنميتها بصورة مترابطة ومتشابهة، للوصول بالتلاميذ لمستوى التمكن والنجاح في الرياضيات فقد أوصت عديد من الدراسات والبحوث بتنمية البراعة الرياضية لدى التلاميذ من خلال استخدام استراتيجيات تدريسية حديثة أو برامج تعليمية جديدة، أو تقنيات تساعد على تصميم موضوعات الرياضيات بصورة تساعد الوصول بالطلاب لمستوى التمكن والنجاح في الرياضيات، ومن هذه الدراسات: (Moodley, 2008)، و(Samuelsson, 2010)، و(Townsend, Lannin & Barker, 2009)، و(Ally, 2011)، و(Freund, 2011)، و(علاء المرسي حامد، ٢٠١٤)، و(Taylor Buckner, 2014)، و(شيماء محمد على، ٢٠١٦)، و(ناصر السيد عبيدة، ٢٠١٧)، و(Stevens, 2017)، و(محمد علام طلبة، ٢٠١٨).

مشكلة البحث :

تتمثل مشكلة البحث في الحاجة إلى تعرف مستوى البراعة الرياضية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية وذلك لأن عديد من الدراسات أوصى بإدخال مكوناتها في المناهج.

أشارت دراسة كل من محمد علام طلبه(٢٠١٨)؛ رشا هاشم عبدالحמיד (٢٠١٧)؛ محمود رائد الضاني(٢٠١٧)؛ Stevens (٢٠١٧)، إلى إدخال مكونات البراعة الرياضية ضمن مناهج التعليم العام ابتداءً من رياض الأطفال، مع تدريب المعلمين على استخدام البراعة الرياضية في عروضهم التدريسية، والأنشطة الصفية، واللاصفية؛ لغرض تنميتها لدى التلاميذ، وضرورة احتواء المناهج الدراسية لمكونات البراعة الرياضية: (الاستيعاب المفاهيمي - الطلاقة الإجرائية - الكفاءة الاستراتيجية - الاستدلال التكيفي - النزعة المنتجة) لتنميتها لدى التلاميذ، كما

أوصت بضرورة إعادة صياغة محتوى الرياضيات للمرحلة الإعدادية بحيث يتضمن العديد من الأنشطة والمواقف التعليمية والحياتية التي تساعد التلاميذ على ممارسة مكونات البراعة الرياضية.

ومن ثم تحددت مشكلة البحث في التعرف على مستوى البراعة الرياضية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية.

مصطلحي البحث:

البراعة الرياضية:

هي المهارة في تنفيذ الإجراءات الرياضية بمرونة ودقة عالية، واستيعاب المفاهيم والعمليات الرياضية أثناء ممارسة عمليات التفكير والتأمل والتبرير وتمثيل وصياغة وحل المشكلات الرياضية لمساعدة المتعلم لرؤية الرياضيات كمادة مفيدة وذات قيمة في حياته العملية ويمتلك الثقة في استخدامها (Groves,2012,122).

وتعرف إجرائياً بأنها: قدرة تلميذ المرحلة الإعدادية على استيعاب المفاهيم الرياضية، وتنفيذ الإجراءات بمرونة ودقة، والقدرة على صياغة وحل المشكلات باستخدام التفكير المنطقي والتأملي، وتبرير وتفسير الحلول، وتقدير قيمة الرياضيات في مواقف الحياة العملية، وتتضمن خمسة مكونات هي: (الاستيعاب المفاهيمي - الطلاقة الإجرائية - الكفاءة الاستراتيجية - الاستدلال التكميلي - النزعة المنتجة).

سؤال البحث:

ما مستوى البراعة الرياضية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية؟

هدف البحث:

التعرف على مستوى البراعة الرياضية بمكوناتها الخمس لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية.

أهمية البحث:

يعطى هذا البحث مؤشراً لمستوى البراعة الرياضية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية، وقد يسهم هذا البحث في تشخيص نقاط القوة أوالضعف إن وجدت، مما يفيد فى تقديم حلول مناسبة لرفع مستوى البراعة الرياضية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية. وتقديم قائمة بمكونات البراعة الرياضية التي ينبغي تنميتها لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية، يمكن الباحثين والمعلمين والمهتمين بتعليم الرياضيات وتعلمها الإفادة منه. كما أن البحث يزود الباحثين والمعلمين والمهتمين بتعليم الرياضيات باختبار للبراعة الرياضية، وبمقياس النزعة المنتجة يمكن الاستفادة منهما.

محددات البحث:

- مكونات البراعة الرياضية: (الاستيعاب المفاهيمي - الطلاقة الإجرائية - الكفاءة الاستراتيجية - الاستدلال التكميلى - النزعة المنتجة).
- تلاميذ المرحلة الإعدادية (الصف الثاني الإعدادي).

منهج البحث:

تم استخدام المنهج الوصفي للإجابة عن سؤال البحث، وذلك لمناسبته لهدف البحث، وهو قياس مستوى البراعة الرياضية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية.

أداتي البحث:

- قائمة بمكونات البراعة الرياضية المناسبة لتلاميذ الصف الثاني الإعدادي.
- تقديم اختبار لقياس مهارات البراعة الرياضية لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي، يمكن للباحثين والمعلمين والمهتمين بتعليم الرياضيات وتعلمها الاستفادة منها.
- تقديم مقياس لقياس النزعة المنتجة لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي، يمكن للباحثين والمعلمين والمهتمين بتعليم الرياضيات وتعلمها الاستفادة منها.

خطوات البحث :

للإجابة عن أسئلة البحث ستتبع الخطوات الإجرائية الآتية:

- إعداد إطار نظري من خلال دراسة الأدبيات والدراسات السابقة وتوصيات المؤتمرات التي تناولت: مكونات البراعة الرياضية.
- إعداد قائمة بمكونات البراعة الرياضية المناسبة لتلاميذ الصف الثاني الإعدادي وذلك في ضوء آراء مجموعة من السادة المحكمين من المتخصصين في مناهج وطرق تعليم الرياضيات، وحساب الوزن النسبي لكل مهارة في ضوء آرائهم.
- إعداد اختبار لقياس مهارات البراعة الرياضية (الاستيعاب المفاهيمي - الطلاقة الإجرائية - الكفاءة الاستراتيجية - الاستدلال التكميلي) لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي.
- إعداد مقياس لقياس أبعاد النزعة المنتجة (مفهوم الذات في الرياضيات - المتعة في الرياضيات - قيمة الرياضيات في الحياة) لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي.

- جمع البيانات وإجراء المعالجات الإحصائية، والتوصل لنتائج البحث، وتحليلها وتفسيرها.
- تقديم توصيات ومقترحات في ضوء نتائج البحث.

الخلفية النظرية للبحث:

البراعة الرياضياتية: Mathematical Proficiency

أولاً: مفهوم البراعة الرياضياتية:

البراعة لغة تأتي من برع يبرع بروعًا وبرعًا وبرعًا، فهو بارع أي تم في كلِّ فضيلة وجمال وفاق أصحابه في العلم وغيره، والبارع هو الذي فاق أصحابه في السؤدد (ابو الفضل جمال الدين محمد، ٢٠٠٨، ٢٦٠).

وباستطلاع عدد من المعاجم اللغوية فإن من المرادفات التربوية لكلمة البراعة، إبداع، إتقان إجادة امتياز، تفوق، تمكن مهارة نجاح، وازدادها التربوية هي إخفاق، استخفاف، رسوب، فشل وتعني أيضًا إتقان العمل والامتياز في أداءه بمهارة ونجاح، والشخص البارع هو الحاذق والماهر والمتقن والمتمكن والمنفوق. ولقد تعددت التعريفات التربوية للبراعة الرياضياتية ومن تلك التعريفات مايلي:

- إحدى نواتج تعلم الرياضيات، وتتألف من خمسة مكونات أساسية (الاستيعاب المفاهيمي، الطلاقة الإجرائية، الكفاءة الاستراتيجية، الاستدلال التكيفي، الرغبة المنتجة نحو الرياضيات)، وتشمل كل جوانب الخبرة والكفاءة والمعرفة بالرياضيات وتعتبر عما نعنيه "لأي فرد أن يتعلم الرياضيات بنجاح" (خالد عبدالله المعثم و سعيد جابر المنوفى، ٢٠١٤).

- المهارة في تنفيذ الإجراءات بمرونة ودقة عالية واستيعاب المفاهيم والعمليات الرياضية، وذلك أثناء التفكير المنطقي والتأملي والتبرير وصياغة وتمثيل وحل

المشكلات الرياضية، حتى يصل المتعلم لرؤية الرياضيات مفيدة وذات قيمة ويكتسب الثقة في استخدامها (علاء المرسي حامد أبوالزيات، ٢٠١٤، ٥٦).

- مهارة أو معرفة أساسية يجب على الطلاب إظهارها بنهاية العام (Jocelyn, 2015, Nadya).

- مدخل معاصر لتطوير تعليم الرياضيات، يرتبط بمحاور ثلاثة رئيسة: براعة المحتوى العلمي في ترابطه وأهميته بالنسبة للطالب، وبراعة المعلم في معالجة المحتوى العلمي، بالإضافة إلى مكونات البراعة العلمية الرياضية التي يجب تتميتها وقياسها لدى الطالب (Andrea, Grayson, 2016, 11).

- امتلاك المعرفة اللازمة، والمهارة العالية لأداء أي عمل كان، ويضرب مثال على البراعة في شخص يملك المعرفة الكاملة بقواعد السير، إضافة إلى المهارة العالية في التدريب على السياقة؛ فتكون النتيجة وجود البراعة عند الشخص في قيادة السيارة (Andrea, Grayson, 2016, 67).

- قدرة المتعلم على استيعاب المفاهيم والعمليات الرياضية والمهارة في تنفيذ الإجراءات الرياضية بكفاءة ودقة عالية والقدرة على صياغة وتمثيل وحل المشكلات والقدرة على التفكير المنطقي والشرح والتبرير والتفسير، حتى يصل المتعلم إلى رؤية الرياضيات كمادة مفيدة وذات قيمة ويكتسب الثقة في اعتمادها، وتتضمن خمسة أبعاد هي: (الفهم المفاهيمي، الطلاقة الإجرائية، الكفاءة الاستراتيجية، الاستدلال التكيفي، الميل المنتج) (عماد شوقي ملقي سيفين، ٢٠١٦، ١٧٤).

- مجموعة عمليات ومهارات التفكير والاتجاهات والميول التي تعزز تعلم الطلاب للرياضيات والتي تتضمن فهم المفاهيم الرياضية، وتنفيذ الإجراءات بمرونة ودقة وبشكل ملائم، والقدرة على صياغة وتمثيل وحل المشكلات باستراتيجيات التفكير

المنطقي والتأملي، وتبرير وتفسير الحلول ويرتبط بالعقلانية والنفعية للرياضيات في الحياة العملية (إيناس نبيل رضوان، ٢٠١٦، ١٠).

- قدرات الطالب في توظيف الخبرات ومعالجتها؛ لتشكيل بنائه المعرفي، ثم توظيفه في حل المشكلات، وإنتاج معرفة رياضية جديدة، وخلالها يقوم الطالب بعمليات رياضية، ويكتسب مهارات خريطة مكونات البراعة الرياضية الخمسة (ناصر السيد عبدالحميد عبيدة، ٢٠١٧، ٢٨).

- مجموعة العمليات والمهارات الرياضية التي يقوم بها الطلاب والمتمثلة في الاستيعاب المفاهيمي الرياضي والطلاقة الإجرائية للعمليات والكفاءة الاستراتيجية في صياغة المسائل وحلها والتكيف الاستدلالي لتبرير الموقف والميل المنتج نحو الرياضيات (محمود رائد الضاني، ٢٠١٧).

- أن يثبت المتعلم الكفاءة فيما يتعلق بالمعرفة، أو مجموعة من المهارات المتعلقة بمعايير وأهداف واضحة وقابلة للقياس، وتستند إلى براعة المعلم وقدرته على إدارة المعرفة (Fitzsimmons, 2017, 65).

- مجموعة المهارات والإجراءات والعمليات التي يستخدمها المتعلم حتى يتعلم الرياضيات بنجاح، وحتى يكون لديه القدرة على حل المشكلات الرياضية والحياتية (رشا هاشم عبدالحميد، ٢٠١٧، ٥٦).

- قدرة وكفاءة مدرسي الرياضيات للمرحلة الثانوية وطلبتهم في الإجابة على اختبارات البراعة الرياضية المعدة للغرض المذكور والمتضمنة أبعادها الخمسة ونقاس بالدرجة النهائية التي يحصلون عليها في كل اختبار (أريج خضر حسن، ٢٠١٨).

- مجموعة من المهارات والعمليات المتسلسلة والمتراصة التي تسعى إلى التقدم في تعليم الرياضيات لدى الطلاب في موضوع الهندسة والقياس، والتي تضم مكونات

هي: الاستيعاب المفاهيمي، الطلاقة الإجرائية، الكفاءة الاستراتيجية، الاستدلال التكييفي، الرغبة المنتجة (أسامة حسن عبدالوهاب، ٢٠١٨، ٦-٧).

- التكامل بين عدة أبعاد مترابطة تمثل بعدين، وهما البعد المعرفي، ويتضمن الفهم المفاهيمي للمحتوى الرياضي، والطلاقة الإجرائية، والكفاءة الاستراتيجية في العمليات الرياضية، والاستدلال التكييفي في التفكير، والبعد الوجداني ويتضمن الميل في الرياضيات المتمثلة بالميل للإنتاج في الرياضيات (زينة عبدالجبار جاسم، ٢٠١٨).

- نشاط عقلي مرن و منظم يظهر قدرة التلميذ على تحقيق مستويات عالية من الأداء الإنتاجي الناجح في تعلم مادة الرياضيات، وتتألف من سبعة مكونات متداخلة ومترابطة ومتفاعلة وتكون (بمجموعها) البراعة في الرياضيات وهي: الفهم المفاهيمي - الطلاقة الإجرائية - الكفاءة الإستراتيجية - الاستدلال التكييفي - النمذجة الرياضية - الرغبة المنتجة - المعتقدات نحو تعلم الرياضيات (محمد محمود محمد حماده، ٢٠١٩).

- قدرة تلميذ الصف الأول الإعدادي على استيعاب المفاهيم والعمليات والعلاقات الرياضية المرتبطة بوحدة الجبر والأعداد، واستخدام خطوات حل المشكلات بمرونة ودقة وكفاءة، كذلك القدرة على صياغة وتمثيل وحل المشكلات الرياضية واكتشاف علاقات رياضية، مع القدرة على تقديم تفسير وتبرير حلول للمشكلات والمواقف الرياضية في إطار رؤية الرياضيات على أنها مفيدة وذات قيمة ويمكن فهمها، من خلال المثابرة والاجتهاد في ممارسة أنشطة المهام والمشكلات الرياضية، وتقاس بدرجة التلميذ في اختبار البراعة الرياضية (الاستيعاب المفاهيمي والطلاقة الإجرائية والكفاءة الإستراتيجية والاستدلال التكييفي)، ومقياس الرغبة الرياضية المنتجة للذين تم إعدادهما بالبحث الحالي (أمل محمد مختار الحفني، ٢٠١٩).

- قدرة الطالب على إجراء العمليات والمهارات الرياضية التي تتضمن الاستيعاب المفاهيمي الرياضي والطلاقة الإجرائية في الحل والكفاءة الاستراتيجية للمسائل والتكيف الاستدلالي للموقف الرياضي والرغبة المنتجة نحو الرياضيات، وتقاس بالدرجة التي يحصل عليها الطالب في اختبار البراعة الرياضياتية الذي أعده الباحث القياس تلك المهارات (إبراهيم محمد الغامدي، ٢٠٢٠).

- نواتج تعليم الطلاب بحيث يكون الطالب قادرًا على توظيف قدراته في معالجة الخبرات وتشكيل بنائه المعرفي، وإنتاج معارف وخبرات رياضية جديدة من خلال ما يقوم به من عمليات وخوارزميات وعلاقات وتوظيف ذلك في حل المشكلات الروتينية وغير الروتينية وذلك من خلال اكتساب واستيعاب المكونات التالية: (الاستيعاب المفاهيمي، الطلاقة الاجرائية، الكفاءة الاستراتيجية، الاستدلال التكيفي، الرغبة المنتجة) (منصور بن مصلح الجهني، ٢٠٢٠).

- مجموعة من العمليات والمهارات التي تسعى المعلمة إلى تعزيزها وتنميتها لدى تلميذات الصف السادس الابتدائي في وحدة الهندسة الزوايا والمضلعات، من خلال توظيف مكوناتها الخمسة، بحيث تشمل استيعاب المفاهيم الرياضية، وتنفيذ الإجراءات بدقة وكفاءة وبشكل مناسب، وصياغة المسائل الرياضية وتمثيلها وحلها من خلال المنطق وتفسير وتبرير الحل مع إكساب التلميذات ميول إيجابية نحو تعلم الرياضيات، ومعرفة مدى أهميتها في الحياة (ريم بنت محمد بريك الرويثي، ٢٠٢٠).

- مجموعة من الأداءات التي تمكن طلاب المرحلة الثانوية من إدراك أنهم قادرون على فهم الرياضيات، وتنفيذ إجراءاتها بمرونة، وصياغة وتمثيل وحل المشكلات الرياضية، وتبرير الحلول وتقدير قيمة الرياضيات في مواقف الحياة الحقيقية وتتضمن خمسة أبعاد تتمثل في: الاستيعاب المفاهيمي، والطلاقة الإجرائية، والكفاءة الإستراتيجية، والاستدلال التكيفي، والنزعة الرياضياتية المنتجة (حماده سعيد محمد وحمد محمد مرسي وزكريا جابر حناوي، ٢٠٢٢).

ويعرفها الباحث إجرائيًا بأنها: قدرة تلميذ الصف الثاني بالمرحلة الإعدادية على استيعاب المفاهيم الرياضية، وتنفيذ الإجراءات بمرونة ودقة، والقدرة على صياغة وحل المشكلات باستخدام التفكير المنطقي والتأملي، وتبرير وتفسير الحلول، وتقدير قيمة الرياضيات في مواقف الحياة العملية، وتتضمن خمسة مكونات هي: (الاستيعاب المفاهيمي - الطلاقة الإجرائية - الكفاءة الإستراتيجية - الإستدلال التكييفي - النزعة المنتجة).

ثانياً: مكونات البراعة الرياضية:

وتعني البراعة الرياضية نواتج تعلم الطلاب بحيث يكون الطالب قادرًا على توظيف قدراته في معالجة الخبرات وتشكيل بنائه المعرفي، وإنتاج معارف وخبرات رياضية جديدة من خلال ما يقوم به من عمليات وخورزميات وتوظيف ذلك في حل المشكلات الروتينية وغير الروتينية وذلك من خلال اكتساب واستيعاب المكونات التالية: (سامية حسين محمد جودة، ٢٠١٩)

-الاستيعاب المفاهيمي Conceptual Understanding

وهي استيعاب ومعالجة محددة ودقيقة للمفاهيم الرياضية وخصائصه ورموزه واستخداماته والتصميمات المرتبطة بها والعلاقات وبناء وتشكيل المعرفة من خلال مجموعة من العمليات بعمق ووضوح وتوظيفها في المواقف الحياتية الروتينية وغير الروتينية.

-الطلاقة الإجرائية Procedural Fluency

هي قدرة الطالب على اختيار العمليات والإجراءات الرياضية المناسبة لحل المشكلات والقدرة على الإنتاج والتحقق من نتائج أكبر عدد ممكن من الحلول والإجراءات بدقة وسرعة.

-الكفاءة الاستراتيجية Strategic Competence

قدرة الطالب وتميزه في صياغة وتمثيل وحل المشكلة الرياضية بمهارة وفاعلية.

-الاستدلال التكميلي Adaptive Reasoning

تتمثل في قدرات الطالب ومهاراته في التأمل الرياضي والتفكير المنطقي وإعطاء الحجج والبراهين بكفاءة وتقديم التفسيرات المنطقية للمشكلات الروتينية وغير الروتينية.

-الرغبة في الإنتاج Productive Disposition

دافع داخلي لدى الطلاب لبذل مزيد من الجهد لدراسة الرياضيات والتأكد من مدى صحة اعتقاداته واهتماماته حول منطقية المحتوى العلمي وطرق توظيفه، واستنتاج واستنباط أهمية وروعة الرياضيات وتطبيقاتها في المواقف الحياتية والعلوم الأخرى.

وتتفق دراسة كل من ناصر السيد عبيدة (٢٠١٧)، و رشا محمد عبدالحميد (٢٠١٧)، و خالد بن عبدالله المعثم وسعيد جابر المنوفي (٢٠١٤)، (Kastberg, 2013)، و مها عبدالنعيم المصاورة (٢٠١٢)، (Fellows, 2009)، (NRC, 2001)

في تحديد مهارات البراعة الرياضية، ويمكن إجمالها كالتالي:

١- الاستيعاب المفاهيمي : Conceptual Understanding

وهو قدرة المتعلم على تكوين فهم متكامل للمفاهيم والأفكار والعلاقات والرموز الرياضية والرسوم البيانية، ويتضمن معرفة الطالب بالمضمون الذي تستخدم فيه الفكرة الرياضية.

٢- الطلاقة الإجرائية: Procedural Fluency

وهي قدرة المتعلم على معرفة إجراءات حل المشكلات الرياضية، وكيفية ومتى يستخدمها بالشكل المناسب والمهارة في إجراء العمليات الرياضية بمرونة وسرعة ودقة، وتتضمن قدرة الطالب على استخدام مجموعة من الإجراءات لحل المشكلة الرياضية المتعددة الخطوات وأن يكون لديه القدرة على تبريرها واستخدام النماذج الحسية والطرق الرمزية.

٣- الكفاءة الاستراتيجية Strategic Competence

ويقصد بها القدرة على صياغة المشكلات الرياضية وتمثيلها وحلها وتكوين صور ذهنية لها وبناء التمثيلات الرياضية، وتحديد الطريقة المناسبة لحل وإنتاج أفكار وحلول متنوعة للمشكلة الرياضية.

٤- الاستدلال التكيفي: Adaptive Reasoning

وهو القدرة على التفكير في المفاهيم والعلاقات الرياضية تفكيراً منطقيًا، والتخمين والتبرير لها، وتوظيف العلاقات المنطقية بين المفاهيم لشرح الحل وتحليله وتبريره، واستخدام النماذج والأنماط الرياضية والأمثلة واستقراء القوانين، وإجراء الخوارزميات والإجراءات الرياضية بشكل مترابط متسلسل مع تقدير معقولة والإجابة وتوليد خطط بديلة للحل.

٥- الرغبة الرياضية المنتجة Productive Disposition

ويقصد بها رؤية الطالب للرياضيات على أنها مادة واقعية ومفيدة ومجدية لها قيمتها في الحياة وذات معنى، وتتضمن اعتقاد الطالب بقدرته على تعلم الرياضيات

وبأنه فعال في أثناء دراستها، وأن لديه القدرة على المثابرة وبذل الجهد لتعلمها، وثقة الطالب في أهمية الرياضيات وفي تقدير دورها في حل المشكلات الحياتية.

وكما حدد مجلس ولاية كاليفورنيا للتعليم California State Board of Education (٢٠١٤، ٦) أن البراعة الرياضية هي مجال من مجالات الرياضيات الوظيفية، وأن مكوناتها هي:

- الاستيعاب المفاهيمي: استيعاب المفاهيم والعمليات والعلاقات.
- الطلاقة الإجرائية: الطلاقة في تنفيذ الخوارزميات والدقة في النتائج.
- الكفاءة الاستراتيجية: صياغة وحل المشكلة، والتحقق منها وفق خطوات واستراتيجيات محددة.
- الاستدلال التكيفي: التفكير المنطقي، والتأمل الرياضي، والتفسير، والتبرير.
- الرغبة في الإنتاج: الإحساس بجمال الرياضيات، وتقدير وظيفتها، والاستمرارية في تعلمها.

وقد حدد المجلس القومي للبحوث NRC خمسة أبعاد للبراعة الرياضية وهي: الاستيعاب المفاهيمي، والطلاقة الإجرائية، والكفاءة الاستراتيجية، والاستدلال التكيفي، والرغبة المنتجة، وتطلق عليها الأدبيات العربية مكونات أو فروع أو خيوط أو مهارات البراعة الرياضية، وذلك نظرًا لتداخلها وتشابكها وترابطها والتي تكون فيه مجموعها البراعة الرياضية لدى المتعلم، وفيما يلي عرض لهذه المكونات (رضا مسعد السعيد، ٢٠١٨، ٧٠-٧٤)، (علاء المرسي حامد، ٢٠١٤، ٦٧-٧٢)، (خالد بن عبدالمعتم و سعيد جابر المنوفي، ٢٠١٤، ٩-١٤)، (Ally, 2011, 20-28)، (NRC, 2001, 5)، (Kilpatrick et al, 2001, 118-133)

١- الاستيعاب المفاهيمي: Conceptual Understanding

ويعني إدراك الأفكار الرياضية، وفهم المفاهيم والعمليات والعلاقات الرياضية، والمعرفة المفاهيمية تشمل الأفكار الخاصة بطبيعة الموضوعات الرياضية، ويتمثل في استخدام أو توضيح أو تمثيل نماذج ملموسة وشبه ملموسة.

٢- الطلاقة الإجرائية: Procedural Fluency

تشير الطلاقة الإجرائية كأحد خيوط البراعة الرياضية إلى معرفة الإجراءات، ومعرفة متى يمكن أداؤها بدقة ومرونة وكفاءة، وتعني القدرة على حل المشكلات الرياضية باستخدام مهارات رياضية مثل القواعد والخوارزميات والمعادلات.

٣- الكفاءة الاستراتيجية: Strategic Competence

وتعني القدرة على تفسير المسألة الرياضية، وصياغتها وتمثيلها وحلها، وذلك من خلال إشراك الطلاب في صياغة المشكلة وحلها، والكفاءة الاستراتيجية أكثر توسعاً من الطلاقة الإجرائية، حيث على الطلاب اختيار الاستراتيجية المناسبة لحل المشكلة، والحكم على مدى فاعلية تلك الاستراتيجية، وكيفية توظيفها للوصول إلى حل المشكلة.

٤- الاستدلال التكييفي: Adaptive Reasoning

ويقصد به القدرة على التفكير المنطقي وتقديم التفسيرات والتبريرات والبراهين أثناء حل المشكلات الرياضية وشرح الإجراء أثناء العمليات التي يقوم عليها الفهم الرياضي، ويكون ذلك من خلال ربط المفاهيم الرياضية أو التمثيلات الرياضية ببعضها البعض، بحيث يوظف مهارات التفكير المنطقي.

٥- الرغبة المنتجة : Productive Disposition

ويقصد بها الميل المعتاد لرؤية الرياضيات على أنها معقولة ومفيدة وجديرة بالاهتمام، إلى جانب الميل إلى معرفة معنى ومتى وكيف وأين يمكن استخدام الرياضيات، والدافعية الإيجابية التي تدفع المتعلم إلى الاعتقاد في الاجتهاد والفعالية والاهتمام.

ولقد توصلت دراسة منصور بن مصلح الجهني (٢٠٢٠) إلى قائمة بالمهارات الرئيسة للبراعة الرياضية والفرعية المنبثقة منها كالتالي:

١- الاستيعاب المفاهيمي : conceptual understanding

ويعني استيعاب المفاهيم والعمليات والعلاقات الرياضية

٢- الطلاقة الإجرائية: procedural fluency

وتعني المهارة في تنفيذ الإجراءات بمرونة وبدقة وبشكل فعال وعلى نحو ملائم.

٣- الكفاءة الإستراتيجية: competencestrategic

وتعني القدرة على صياغة وتمثيل وحل المشكلات الرياضية.

٤- الاستدلال التكيفي : adaptive reasoning

ويعني القدرة على التفكير المنطقي والتأملي والشرح والتفسير والتبرير.

كما توصلت دراسة محمد عواض ساير القرشي (٢٠٢١) إلى قائمة بالمهارات الرئيسة للبراعة الرياضية والفرعية المنبثقة منها كالتالي:

١- الاستيعاب المفاهيمي:

- يطرح أنشطة تربط بين الأفكار الرياضية.
- يستخدم استراتيجيات تدريسية متنوعة لاستيعاب المفاهيم الرياضية.
- يشجع الطلاب على استنتاج خصائص المفاهيم الرياضية.
- يوجه الطلاب لاستنتاج التصميمات المرتبطة بالمفاهيم الرياضية.
- يوجه الطلاب لاستخدام الرموز الرياضية.
- يوجه الطلاب لتمثيل المواقف الرياضية بشكل أو رسم أو أي تمثيلات رياضية أخرى.

٢- الطلاقة الإجرائية:

- يتابع التسجيل الدقيق لحلول الطلاب ويشجع الطلاب على الحل بأكثر من طريقة للمهمة الرياضية.
- يشجع الطلاب على استخدام الحساب الذهني.
- يتابع المسار المنطقي لحلول الطلاب في المسائل غير المباشرة.
- يوجه الطلاب إلى استنتاج الحقائق والعلاقات للمهمة الرياضية.
- يناقش الطلاب في تحققهم من صحة نتائجهم.
- يقدم عدد كافٍ من الأنشطة التي تكسب الطلاب الطلاقة الإجرائية.

٣- الكفاءة الاستراتيجية:

- يعرض على الطلاب مسائل رياضية من واقع الحياة.
- يطلب من الطلاب قراءة المسألة الرياضية بتركيز وعمق وفهم.

- يوجه الطلاب إلى استخدام الخطوات الأربع لحل المسألة الرياضية.
 - تحديد المعطيات والمطلوب في المسألة الرياضية.
 - يطلب من الطلاب صياغة المسألة الرياضية بلغتهم الخاصة.
 - يشجع الطلاب على تمثيل المسألة الرياضية بشكل أو رسم أو نموذج
 - يحفز الطلاب على تحديد الاستراتيجية المناسبة للحل ويصوب حلول الطلاب للمسألة الرياضية.
 - يوجه الطلاب إلى التحقق من صحة حلولهم للمسألة الرياضية.
- ٤- الاستدلال التكميلي:
- بوجه الطلاب إلى المقارنة بين حلولهم للمسألة الرياضية.
 - يحث الطلاب على تفسير إجاباتهم.
 - يشجع الطلاب على تبرير إجاباتهم.
 - يناقش الطلاب حول صحة حججهم الرياضية.
 - يناقش الطلاب حول الاستقرارات الممكنة للموقف الرياضي.
 - يحث الطلاب على استنتاج العلاقات بين الأفكار الرياضية.
 - يطرح أسئلة تأملية تثير تفكير الطلاب.

كما توصلت دراسة كل من سعيد جابر المنوفي وخالد بن عبدالله المعثم (٢٠١٨) إلى قائمة بالمهارات الرئيسة للبراعة الرياضية والفرعية المنبثقة منها كالتالي:

١- الاستيعاب المفاهيمي:

- تعريف وتصنيف وتعميم أمثلة لمفاهيم رياضية.
- استخدام نماذج مترابطة، ورسوم بيانية، وبيانات، وتمثيلات متنوعة للمفاهيم.
- تحديد وتطبيق مبادئ فى الرياضيات.
- معرفة وتطبيق حقائق وتعريفات.
- تعريف وتفسير وتطبيق الإشارات والرموز والمصطلحات المستخدمة لتمثيل المفاهيم.

٢- الطلاقة الاجرائية:

- الكفاءة: وتعني إمكانية تنفيذ الاستراتيجية بسهولة.
- الدقة: وتعتمد على التسجيل الدقيق، معرفة العلاقات العددية، والتحقق من النتائج.
- المرونة: وتتطلب معرفة أكثر من أسلوب لحل التمارين الرياضية.

٣- الكفاءة الاستراتيجية:

- صياغة المسألة الرياضية.
- تمثيل المسألة الرياضية.
- حل المسألة الرياضية.

٤- الاستدلال التكيفي:

- استخدام المنطق الاستقرائي فى اكتشاف الأنماط وبناء التعميمات.
 - بناء التخمينات والتحقق من صحتها.
 - تقديم تفسيرات وتبريرات لما يتم عمله.
- ولقد توصلت دراسة أريج بنت عبدالله محمد الملوحى (٢٠٢٠) إلى قائمة بالمهارات الرئيسة للبراعة الرياضية والفرعية المنبثقة منها كالتالى:

١- الاستيعاب المفاهيمي:

- أن تربط الطالبة بين الأفكار الرياضية.
- أن تستخدم الطالبة الفكرة الرياضية فى السياق المناسب.

٢- الطلاقة الاجرائية:

- أن تجرى الطالبة عمليات صحيحة بدقة وكفاءة وبطريقة سليمة ملائمة للموقف والحصول على نتائج صحيحة للعمليات الحسابية.

٣- الكفاءة الاستراتيجية:

- أن تستخدم الطالبة المعطيات المهمة وتتجاهل المعطيات الزائدة.
- أن تمثل الطالبة المسألة الرياضية تمثيلاً بيانياً.
- أن تمثل الطالبة المسألة الرياضية تمثيلاً ذهنياً.

٤- الاستدلال التكميقي:

- أن تستدل الطالبة رياضياً بما يتناسب مع الموقف بالتفسير والتبرير والشرح.

٥- الرغبة المنتجة:

- أن تعتقد الطالبة بأن الرياضيات مادة مفيدة.
- أن تعتقد الطالبة بأن الرياضيات جديرة بالاهتمام.
- أن تعتقد الطالبة بأن بذل الجهد يؤتي ثماره.

كما توصلت دراسة محمود رائد عزيز الضاني (٢٠١٧) إلى قائمة بالمهارات الرئيسية للبراعة الرياضية والفرعية المنبثقة منها كالتالي:

١- الاستيعاب المفاهيمي:

- استيعاب معني المفهوم الرياضي، وخصائصه، ورموزه، والعمليات المرتبطة به.
- معرفته لأهمية الأفكار الرياضية، سواء كان ذلك في مجال العلوم الرياضية أو غيرها من المجالات كالعلوم الأخرى.
- معرفته للمضمون الذي تستخدم فيه الفكرة الرياضية.
- معرفته للترابطات العديدة بين الأفكار الرياضية.

٢- الطلاقة الإجرائية:

- تمييز العمليات، وتطبيق خصائصها، واستنتاج العلاقة بينها.
- يختار ويطبق الإجراءات المناسبة بشكل صحيح.
- كتابة الطالب للإجراءات والأساليب الذهنية.
- استخدامه بعض الخوارزميات المهمة في اختبار صحة المفاهيم.
- انجازه المهام الروتينية بكفاءة.

٣- الكفاءة الاستراتيجية:

- تحديد المعطيات الرياضية المهمة وتجاهل المعلومات الزائدة.
- تمثيل المسائل رياضياً.
- البحث عن المسائل المشابهة فى حلها وصياغتها.
- توليد نماذج من المسألة الرياضية.

٤- الاستدلال التكييفي:

- التفكير المنطقي حول العلاقات والمواقف.
 - الحدس والبديهية والمنطق الاستقرائي.
 - تقديم تفسيرات وتبريرات غير رسمية.
 - الاستكشاف أو الإبحار فى العديد من الحقائق والمفاهيم والحلول لمعرفة ما إذا كانت تتكامل فيما بينها بطريقة منطقية.
- وفي ضوء ما سبق أمكن التوصل إلى قائمة مبدئية بمكونات البراعة الرياضية التي يمكن تلميزها لدى تلاميذ الصف الثاني بالمرحلة الإعدادية كالتالي:

١- الاستيعاب المفاهيمي: Conceptual understanding

- يصنف المفاهيم الرياضية.
- يمثل المفاهيم الرياضية مستخدماً نماذج ورسوم بيانية ويدويات و.....
- يطبق المفاهيم والقواعد والقوانين الرياضية بشكل صحيح.
- يطبق الإشارات والرموز والمصطلحات المستخدمة لتمثيل المفاهيم.
- يستنتج خصائص المفاهيم الرياضية.

٢- الطلاقة الإجرائية: procedural fluency

- يحل المهام الرياضية بأكثر من طريقة.
- يستخدم الحساب الذهني.
- يستخدم المسار المنطقي أثناء حل المسائل الرياضية.
- يتحقق من صحة حل المشكلات الرياضية.

٣- الكفاءة الاستراتيجية: Competence strategic

- يحل مشكلات رياضية غير روتينية.
- يصوغ المسألة الرياضية بلغته الخاصة.
- يمثل المسألة الرياضية بشكل أو رسم أو نموذج أو
- يصوغ مشكلات رياضية متعلقة بالحقائق والتعميمات المتعلمة.

٤- الاستدلال التكيفي: Adaptive reasoning

- يكتشف الأخطاء في نواتج العمليات الرياضية.
- يبني تخمينات أثناء حل المشكلات الرياضية.
- يفسر إجابات المسائل الرياضية.
- يحدد مدى مناسبة الإجراءات المستخدمة في حل المشكلات الرياضية.

٥- النزعة المنتجة: Productive Disposition

- مفهوم الذات فى الرياضيات.
- المتعة فى الرياضيات.
- قيمة الرياضيات فى الحياة.

من خلال ما سبق نستنتج أن معظم الدراسات السابقة اتفقت على أن المكونات الرئيسية للبراعة الرياضياتية تتمثل فى الاستيعاب المفاهيمي، والطلاقة الإجرائية، والكفاءة الاستراتيجية ، والاستدلال التكيفي، والنزعة المنتجة، واختلفت فى تحديد المكونات الفرعية المنبثقة من كل مكون رئيس، وقد حددها الباحث كما هو متضمن فى القائمة النهائية.

إعداد أدوات البحث وضبطها:

تم استخدام أداتين هما اختبار البراعة الرياضياتية لقياس مهارات البراعة الرياضياتية (الاستيعاب المفاهيمي - الطلاقة الاجرائية - الكفاءة الاستراتيجية - الاستدلال التكيفي) ومقياس لقياس النزعة المنتجة. ولبنائهما تم اتباع الخطوات الآتية:

أولاً: بناء قائمة مكونات البراعة الرياضياتية:

- تم تحديد مؤشرات لكل مكون من مكونات البراعة الرياضياتية؛ والتي تم اعتمادها فى هذا البحث، وتم تحكيمها والتعديل عليها وهي كما يلي:

مؤشرات مكونات البراعة الرياضياتية فى صورتها النهائية

المؤشرات	المكون الرئيس
يصنف المفاهيم الرياضية	الاستيعاب المفاهيمي
يمثل المفاهيم الرياضية مستخدماً نماذج ورسوم بيانية وبيانات و	
يطبق المفاهيم والقواعد والقوانين الرياضية بشكل صحيح	
يطبق الاشارات والرموز والمصطلحات المستخدمة لتمثيل المفاهيم	
يستنتج خصائص المفاهيم الرياضية	

المؤشرات	المكون الرئيس
يحل المهام الرياضية بأكثر من طريقة	الطلاقة الإجرائية
يستخدم الحساب الذهني	
يستخدم المسار المنطقي أثناء حل المسائل الرياضية	
يتحقق من صحة حل المشكلات الرياضية	الكفاءة الاستراتيجية
يحل مشكلات رياضية غير روتينية	
يصوغ المسألة الرياضية بلغته الخاصة	
يمثل المسألة الرياضية بشكل أو رسم أو نموذج أو يصوغ مشكلات رياضية متعلقة بالحقائق والتعميمات المتعلمة	
يكتشف الأخطاء في نواتج العمليات الرياضية	الاستدلال التكفي
يبني تخمينات أثناء حل المشكلات الرياضية	
يفسر اجابات المسائل الرياضية	
يحدد مدى مناسبة الاجراءات المستخدمة في حل المشكلات الرياضية	النزعة المنتجة
مفهوم الذات في الرياضيات	
المتعة في الرياضيات	
قيمة الرياضيات في الحياة	

وقد اعتمد الباحث على هذه المؤشرات في بناء اختبار البراعة الرياضياتية ومقياس النزعة المنتجة.

ثانياً: إعداد اختبار مهارات البراعة الرياضياتية:

(الهدف من الاختبار :

يهدف هذا الاختبار إلى التعرف على مستوى البراعة الرياضياتية والمتمثلة في الاستيعاب المفاهيمي، الطلاقة الإجرائية، الاستدلال التكفي، الكفاءة الإستراتيجية لدى تلاميذ الصف الثاني بالمرحلة الإعدادية.

(٢) مصادر اشتقاق مواقف الاختبار:

تم الاطلاع على عدد من البحوث والمراجع العلمية ذات الصلة بمهارات البراعة الرياضية، والاستفادة منها في صياغة مفردات اختبار البراعة الرياضية لتلاميذ الصف الثاني بالمرحلة الإعدادية.

(٣) صياغة مواقف الاختبار:

يتكون هذا الاختبار من ست عشرة مفردة (١٦) من النوع المقالي، ويوضح جدول (٤) توزيع مفردات الاختبار على مهارات البراعة الرياضية (الاستيعاب المفاهيمي، الطلاقة الإجرائية، الاستدلال التكيفي، الكفاءة الإستراتيجية).

جدول (١): توزيع مفردات اختبار مهارات البراعة الرياضية

عددها	أرقام المفردات المقاسة	المهارة
٤	٤ - ٣ - ٢ - ١	الاستيعاب المفاهيمي
٤	٨ - ٧ - ٦ - ٥	الطلاقة الإجرائية
٤	١٢ - ١١ - ١٠ - ٩	الاستدلال التكيفي
٤	١٦ - ١٥ - ١٤ - ١٣	الكفاءة الإستراتيجية
١٦		المجموع الكلى

(٤) نظام تقدير الدرجات:

تم تحديد الدرجة النهائية للاختبار بواقع اثنين وثلاثين (٣٢) درجة؛ تم تخصيص درجتان لكل مفردة من مفردات مهارات البراعة الرياضية حيث تم وضع قواعد ومعايير أثناء التصحيح.

٥) صدق الاختبار:

تم عرض الاختبار على مجموعة من السادة المحكمين من المتخصصين في المناهج وطرق تدريس الرياضيات؛ وذلك لمعرفة مدى مناسبه لتحقيق الهدف الذى وضع من أجله، وقد تم تعديل بعض مفردات الاختبار بناءً على تعديلات السادة المحكمين، وقد أقر السادة المحكمون صلاحية الاختبار ومناسبه، واعتبرت هذه الموافقة دليلاً على صدق الاختبار.

٦) التجربة الاستطلاعية للاختبار:

تم تطبيق الاختبار استطلاعياً على مجموعة مكونة من واحد وثلاثين (٣١) تلميذاً من تلاميذ الصف الثاني الإعدادي بمدرسة الشهيد هشام محمود إبراهيم يونس الإعدادية المشتركة التابعة لإدارة الوقف التعليمية (محافظة قنا) بهدف:

- حساب معاملات الصعوبة والسهولة: تم حساب معامل الصعوبة والسهولة لكل مفردة من مفردات الاختبار باستخدام المعادلة المعدة لذلك (أمين على محمد، ٢٠١٠ ، ٣١٣)، ووجد أن معاملات صعوبة الاختبار تتراوح بين (٠.٥٢-٠.٧٣) وهى قيم مقبولة لمعاملات الصعوبة، وقد تم حساب معامل التمييز لكل موقف، ووجد أن معاملات التمييز لمفردات الاختبار تتراوح بين (٠.٢٥-٠.٢٥) وهى قيم مقبولة لمعامل التمييز.

- حساب معامل ثبات الاختبار: تم حساب معامل ثبات الاختبار باستخدام طريقة التجزئة النصفية لـ "Guttman" باستخدام المعادلة المعدة لذلك (عماد أحمد حسن ، ٢٠١٠ ، ١٨٩) لايجاد معامل الارتباط بين نصفي الاختبار وهو مساوٍ لمعامل ثبات الاختبار، حيث وجد أن معامل ثبات المقياس = ٠.٨٨٦ ، وهذه القيمة دالة عند مستوى (٠.٠١) وهو معامل ثبات مناسب

وبعد التأكد من صدق وثبات الاختبار أصبح معدًا للتطبيق في صورته النهائية.

- تحديد الزمن الكلي للاختبار؛ حيث تم التسجيل التتابعي للزمن الذي يستغرقه كل تلميذ، ثم تم حساب متوسط زمن أداء الاختبار فكان الزمن الناتج هو خمس وأربعون (٤٥) دقيقة وهذا هو الزمن المناسب لأداء الاختبار.

ثانيًا: إعداد مقياس النزعة المنتجة:

(١) الهدف من المقياس:

يهدف هذا المقياس إلى التعرف علي مستوى النزعة المنتجة والمتمثلة في مفهوم الذات في الرياضيات، المتعة في الرياضيات، قيمة الرياضيات في الحياة لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية.

(٢) مصادر اشتقاق عبارات المقياس:

تم الإطلاع على الدراسات والبحوث والأدبيات التربوية التي تناولت النزعة المنتجة، وإجراء مقابلات مع المتخصصين وخبراء علم النفس التربوي وخبراء المناهج وطرق تدريس الرياضيات بصفة خاصة والاستفادة منها في صياغة عبارات المقياس لتلاميذ الصف الثاني بالمرحلة الإعدادية.

(٣) صياغة عبارات المقياس:

يتكون المقياس من اثنتي عشرة (١٢) عبارة موزعة على ثلاثة أبعاد رئيسية هي: مفهوم الذات في الرياضيات، المتعة في الرياضيات، قيمة الرياضيات في الحياة، وقد تم مراعاة النقاط التالية عند صياغة عبارات المقياس:

- ألا تكون العبارات قابلة للتفسير بأكثر من طريقة.

٥ - ألا تشير العبارات إلى ماضٍ.

- أن يجمع كل بعد من الأبعاد بين العبارات الموجبة والعبارات السالبة.

- أن تحتوى كل عبارة على فكرة واحدة.

- أن تكون العبارات واضحة وبسيطة ومباشرة.

(٤) نظام تقدير الدرجات:

تم تحديد الدرجة النهائية للمقياس بواقع ست وثلاثين (٣٦) درجة؛ وتم استخدام النظام الثلاثي لبنود الاستجابة (دائمًا - أحيانًا - نادرًا)، حيث حددت ثلاث (٣) درجات لإجابة دائمًا، ودرجتين (٢) لإجابة أحيانًا، ودرجة واحدة (١) لإجابة نادرًا، وهذه الدرجات في حالة العبارات الموجبة، والعكس في حالة العبارات السالبة، وحيث أن عدد عبارات المقياس اثنتا عشرة (١٢) عبارة، فتكون الدرجة العظمى للمقياس هي (٣٦) درجة، والدرجة المتوسطة للمقياس هي (٢٤) درجة، والدرجة الأدنى للمقياس هي (١٢) درجة.

(٥) صدق المقياس:

تم عرض المقياس على مجموعة من السادة المحكمين من المتخصصين في المناهج وطرق تدريس الرياضيات، وذلك لمعرفة مدى مناسبته لتحقيق الهدف الذى وضع من أجله، وقد تم تعديل بعض عبارات المقياس، وإعادة صياغة بعض العبارات بناءً على تعديلات السادة المحكمين، وقد أقر السادة المحكمون صلاحية المقياس ومناسبته، واعتبرت هذه الموافقة دليلاً على صدق المقياس.

٦) التجربة الاستطلاعية للمقياس:

تم تطبيق المقياس استطلاعياً على مجموعة مكونة من واحد وثلاثين (٣١) تلميذاً من تلاميذ الصف الثاني الإعدادي بمدرسة الشهيد هشام محمود إبراهيم يونس الإعدادية المشتركة التابعة لإدارة الوقف التعليمية (بمحافظة قنا) بهدف:

- حساب معامل ثبات المقياس: تم استخدام طريقة إعادة تطبيق المقياس (حفني إسماعيل محمد و محمد حسن عبدالشافي، ٢٠١٧ ، ٨٢)؛ حيث تم تطبيق المقياس بفواصل زمني قدره ثلاثة أسابيع على تلاميذ المجموعة الاستطلاعية، وبحساب معامل الارتباط بين الدرجات التي حصل عليها تلاميذ المجموعة الاستطلاعية في التطبيقين الأول والثاني وجد أن معامل الارتباط وهو مساوٍ لمعامل ثبات المقياس = ٠.٧٧٤ وهذه القيمة دالة عند مستوى ٠.٠١ وهو معامل ثبات مناسب وبعد التأكد من صدق وثبات المقياس أصبح معداً للتطبيق في صورته النهائية.
- تحديد الزمن الكلي للمقياس؛ حيث تم التسجيل التتابعي للزمن الذي يستغرقه كل تلميذ، ثم تم حساب متوسط زمن أداء المقياس فكان الزمن الناتج هو ثلاثون (٣٠) دقيقة وهذا هو الزمن المناسب لأداء المقياس .

نتائج البحث وتفسيرها:

أولاً: سعى البحث إلى الإجابة عن سؤال الذي ينص على " ما مستوى البراعة الرياضية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية؟ "

في الجدول التالي، المتوسطات الحسابية والنسب المئوية والانحرافات المعيارية لمستوى مكونات البراعة الرياضية لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي

جدول (٢) المتوسطات الحسابية والنسب المئوية والانحرافات المعيارية لمستوى مكونات البراعة الرياضية

المستوى	النسبة المئوية	الانحراف المعيارى	المتوسط	مكونات البراعة الرياضية
منخفض	١٤.٩١%	١.١٥	٤.٧٧	مهارات البراعة الرياضية
منخفض	١١.٧٢%	٠.٧٢	٤.٢٢	النزعة المنتجة

يتضح من جدول (٢) أن المتوسط الحسابي لمستوى مهارات البراعة الرياضية لدى تلاميذ الصف الثاني الاعدادي هو (٤.٧٧) بنسبة مئوية (١٤.٩١%)، وهذا يعني أن مستوى مهارات البراعة الرياضية لدى تلاميذ الصف الثاني الاعدادي منخفض، و أن المتوسط الحسابي لمستوى النزعة المنتجة لدى تلاميذ الصف الثاني الاعدادي هو (٤.٢٢) بنسبة مئوية (١١.٧٢%)، وهذا يعني أن مستوى النزعة المنتجة لدى تلاميذ الصف الثاني الاعدادي منخفض، ويرجع ذلك للأسباب التالية:

- ضعف الاستيعاب المفاهيمي لدى التلاميذ؛ حيث أن الأسئلة تناولت مفاهيم تتطلب التمكن من خبرات سابقة، واتضح ضعف التلاميذ في التعامل مع أبسط المفاهيم الرياضية وعدم استخدام القوانين في السياقات المناسبة.
- معظم التلاميذ ينفذ العمليات الحسابية بطريقة سليمة لمحاولة الوصول للحل، ولكن ليست في سياقها المناسب.
- ضعف قدرة التلاميذ على اختيار الاستراتيجية المناسبة للوصول إلى الاجابة الصحيحة.

- الواقع التعليمي أحياناً لا يعط التلاميذ قدراً كافياً من الحرية لطرح الآراء والملاحظات المختلفة أثناء مناقشة الموضوعات المتعلقة بمادة الرياضيات.

- البيئة التعليمية لا زالت غير قادرة على توظيف الرياضيات فى مجالات دراسية اخرى مما يعيق تطبيق الرياضيات فى مواقف حياتية وبالتالي عدم ادراك القيمة النفعية لها.

التوصيات:

- ضرورة الاهتمام بتنمية مكونات البراعة الرياضية لدى التلاميذ فى جميع المراحل التعليمية.
- عقد دورات تدريبية لتدريب المعلمين قبل الخدمة وأثناء الخدمة على تنمية مكونات البراعة الرياضية وكيفية تنميتها لدى تلاميذهم.
- تطوير برامج إعداد معلمي الرياضيات بالمرحلة الإعدادية بكليات التربية لتصبح مقرراتها مبنية على أساس البراعة الرياضية ورعايتها وتنمية مكوناتها، وإضافة مقررات تؤكد على أهمية المعلم المشجع على البراعة الرياضية.
- تطوير مناهج الرياضيات بالمرحلة الإعدادية بما يسمح للمعلم والطالب من استخدام مكونات البراعة الرياضية، وتضمن أدلة المعلمين استراتيجيات واساليب تدريس تنمى البراعة الرياضية ومرتبطة بما يدرسه التلاميذ.
- توجيه نظر القائمين على تطوير مناهج الرياضيات بتضمن مكونات البراعة الرياضية فى مقررات الرياضيات بالمراحل التعليمية المختلفة
- ضرورة توفير بيئة تعليمية محفزة تساعد على تنمية مكونات البراعة الرياضية لدى الطلاب والمعلمين .

البحوث المقترحة:

- برنامج تدريبي لتنمية مهارات تدريس البراعة الرياضية لدى الطلاب المعلمين شعبة الرياضيات بكلية التربية.
- فاعلية نموذج التعلم التوليدى فى تنمية مكونات البراعة الرياضية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية.
- تقييم الأداء التدريسي لمعلمى الرياضيات فى ضوء مكونات البراعة الرياضية بالمرحل التعليمية المختلفة.
- استخدام مدخل حل المشكلات مفتوحة النهاية فى تنمية مكونات البراعة الرياضية لدى طلاب المرحلة الثانوية.

المراجع:

- إبراهيم بن محمد على الغامدي (٢٠٢٠). فاعلية استراتيجية التدريس بالواقع المعزز في تنمية البراعة الرياضية والتفكير البصري لدى طلاب المرحلة المتوسطة. مجلة العلوم التربوية، ٣٢(٣)، نوفمبر، ٤٨٥-٥١١.
- ابو الفضل جمال الدين محمد ابن منظور (٢٠٠٨). لسان العرب. بيروت: دار صادر للنشر.
- أريج بنت عبدالله محمد الملوحى (٢٠٢٠). مستوى البراعة الرياضية لدى طالبات الصف السادس الإبتدائي بمدينة الرياض. مجلة تربويات الرياضيات، ٢٣(٣)، أبريل، ١٩٢-٢١٦.
- أريج خضر حسن (٢٠١٨). العلاقة الارتباطية بين البراعة الرياضية لدى مدرسي الرياضيات وبين البراعة الرياضية لدى طلبتهم. مجلة جامعة الأنبار للعلوم الإنسانية، ٢(٢)، ٣٧١-٣٩٠.

أسامة حسن عبدالوهاب زيدان (٢٠١٨). فاعلية برنامج مقترح قائم على البراعة الرياضية في اكتساب المفاهيم والتفكير الرياضي لدى طلاب الصف السابع الأساسي بغزة. رسالة ماجستير غير منشورة، كلية التربية، الجامعة الإسلامية بغزة.

أمل محمد مختار الحفني (٢٠١٩). فعالية الدائم التعليمية في تنمية البراعة الرياضية لدى تلاميذ الصف الأول الإعدادي. مجلة كلية التربية بالمنوفية، ٣٤(٤)، ٢٤١-١٦٠.

إيناس نبيل رضوان (٢٠١٦). أثر برنامج تعليمي قائم على البراعة الرياضية في التحصيل والتفكير الرياضي لدى طلبة الصف السابع الأساسي في محافظة قلقيلية. رسالة ماجستير، كلية الدراسات العليا، جامعة النجاح الوطنية.

حفني اسماعيل محمد ومحمد حسن عبدالشافى (٢٠١٧). الاحصاء التربوي فى المناهج. القاهرة: مكتبة الأنجلوالمصرية.

حماده سعيد محمد، حمدي محمد مرسي، زكريا جابر حناوي (٢٠٢٢). برنامج مقترح في "القيادة الآمنة" مبني على منحنى STEM لتنمية مكونات البراعة الرياضية لدى طلاب الصف الثاني الثانوي. مجلة كلية التربية بأسسيوط، ٣٨(٣)، ٧٦-١٠٥.

خالد بن عبدالله المعثم وسعيد جابر المنوفي (٢٠١٤). تنمية البراعة الرياضية توجه جديد للنجاح في الرياضيات المدرسية. المؤتمر الرابع في تعليم الرياضيات وتعلمها في التعليم العام بحوث وتجارب متميزة، الجمعية السعودية للعلوم الرياضية، جسر.

خالد بن عبدالله المعثم وسعيد جابر المنوفي (٢٠١٨). مدى تمكن طلاب الصف الثاني المتوسط بمنطقة القصيم من مهارات البراعة الرياضية. مجلة تربويات الرياضيات، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، ٢١ (٦)، ٥٩ - ١٠٥.

رشا هاشم محمد عبد الحميد (٢٠١٧). فعالية استخدام استراتيجيات الرحلات المعرفية عبر " الويب كوست" في تدريس الهندسة لتنمية البراعة الرياضية لدى طالبات المرحلة المتوسطة. مجلة تربويات الرياضيات، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، ٢٠ (٣)، ٣٢ - ٨٧.

رضا مسعد السعيد (٢٠١٨). البراعة الرياضية: مفهوما ومكوناتها وطرق تنميتها. الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، المؤتمر العلمي السنوى السادس عشر: تطوير تعليم وتعلم الرياضيات لتحقيق ثقافة الجودة، القاهرة: كلية التربية - جامعة بنها. ٦٧ - ٨٠.

ريم بنت محمد بريك الرويثي، نجوى بنت عطيان محمد المحمدي (٢٠٢٠). فاعلية استخدام منحنى STEM في تنمية الرغبة المنتجة من البراعة الرياضية لدى تلميذات المرحلة الابتدائية. مجلة القراءة والمعرفة، (٢٣٠)، ٢٠٥ - ٢٣٩.

زينة عبدالجبار جاسم (٢٠١٨). تصميم تعليمي - تعليمي على وفق الكفاءة الرياضية وأثره في عادات العقل والكفاءة الرياضية لدى طالبات الصف الرابع العلمي. رسالة دكتوراه، جامعة بغداد.

سامية حسين محمد جودة (٢٠١٩). فعالية استخدام برنامج (GeoGebra) في تدريس الهندسة والاستدلال المكاني في تنمية مكونات البراعة الرياضية ومهارات التعلم الذاتي لدى طالبات المرحلة المتوسطة. المجلة التربوية، كلية التربية، جامعة سوهاج، العدد الرابع والعشرون.

شيماء محمد علي حسن (٢٠١٦). فاعلية برنامج قائم على استراتيجيات التدريس المتمايز في تنمية الكفاءة الرياضية لدى طلاب المرحلة الثانوية. مجلة تربويات الرياضيات، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، ١٩ (٥)، الجزء الثاني، ١٠٢-٥١.

علاء المرسي حامد أبو الريات (٢٠١٤). فعالية استخدام نموذج أبعاد التعلم لمارزانو في تدريس الرياضيات على تنمية الكفاءة الرياضية لدى طلاب المرحلة الإعدادية. مجلة تربويات الرياضيات، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، ١٧، أبريل، الجزء الثاني، ٥٣-١٠٤.

عماد شوقي مقلي سيفين (٢٠١٦). فاعلية استراتيجية مقترحة قائمة على نموذج " مارزانو الأبعاد التعلم " في تنمية الكفاءة الرياضية وبعض عادات العقل في الرياضيات لدى تلاميذ الصف الثاني الإعدادي. مجلة تربويات الرياضيات، ١٩ (٤)، أبريل، ١٧١-٢١٧.

محمد علام طلبة (٢٠١٨). فاعلية استخدام استراتيجية PDEODE في تدريس الرياضيات في تنمية الكفاءة الرياضية لدى تلاميذ المرحلة الإعدادية. مجلة تربويات الرياضيات، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، ٢١ (٥)، ٦٧ - ١١٦.

محمد عواض ساير القرشي (٢٠٢١). تقييم الممارسات التدريسية لمعلمي الرياضيات في ضوء متطلبات الأبعاد العقلية للبراعة الرياضية لدى طلاب المرحلة المتوسطة. مجلة تربويات الرياضيات، ٢ (٢٤)، يناير، ٢٧٣-٢٩٩.

محمد محمود محمد حماده (٢٠١٩). التفاعل بين استراتيجيات التعلم النظم ذاتيا وأنماط التغذية الراجعة في تنمية البراعة الرياضية ومهارات التفاوض المعرفي لتلاميذ الصف الأول الإعدادي. المجلة المصرية لتربويات الرياضيات، ٢٢ (٣)، يناير، ٧٠-١٢٦.

محمود رائد الضاني (٢٠١٧). أثر استخدام استراتيجية التعلم بالدماع ذي الجانبين على تنمية البراعة الرياضية لدى طلاب الصف السادس الأساسي بغزة. (رسالة ماجستير)، كلية التربية، الجامعة الإسلامية، غزة، فلسطين.

منصور بن مصلح الجهني (٢٠٢٠). أثر استخدام برنامج الجوجبرا في تنمية البراعة العلمية الرياضية في مادة الرياضيات لطلاب الصف الثالث المتوسط بمدينة الرياض. مجلة التربية الخاصة والتأهيل، ٣٧(١٠)، يوليو، ١١٣-١٦٩.

مها عبد المنعم محمد المصاورة (٢٠١٢). أثر التدريس وفق استراتيجية قائمة على الربط والتمثيل الرياضي في البراعة الرياضية لدى طلبة الصف السادس الأساسي. رسالة ماجستير غير منشورة، الجامعة الهاشمية الزرقاء، الأردن.

ناصر السيد عبيدة (٢٠١٧). فاعلية نموذج تدريس قائم على أنشطة PIZA في تنمية مكونات البراعة الرياضية والثقة الرياضية لدى طلبة الصف الأول الثانوي. دراسات في المناهج وطرق التدريس، الجمعية المصرية للمناهج وطرق التدريس، (٢١٩)، ١٦-٧٠.

Ally, N. (2011). The promotion of mathematical proficiency in Grade 6 mathematics classes from the uMgungundlovu district in KwaZulu-Natal (Master's thesis). Retrieved from <http://hdl.handle.net/10413/5791>.

Andrea, Grayson. (2016). *What's the Deal with Proficiency - Based Learning?*. Retried March 8, 2024, from: <https://thegraysongroup.wordpress.com/mediaproduction>.

California State Board of Education (CSBE) (2014): **Common Core State Standards Mathematics**. the California Department of Education, California, USA.

Fellows, S. (2009). Assessing Mathematical Proficiency, The Mathematics Teacher; Reston. National Council of Teachers of Mathematics, United States, 102(7), 558.

- Fitzsimmons, pat & et al. (2017). Why is Proficiency-Based learning Important?. Retrieved March 15, 2024, from: <http://www.education.vermont.gov/sites/aoe/files/documents/edu-proficiency-based-education-why-is-proficiency-based-learning-important.pdf>.
- Freund, D., & Patrice N., (2011). Opportunities to Develop Mathematical Proficiency: How Teachers Structure Participation in the Elementary Mathematics Classroom, Ph.D., University of California, Los Angeles.
- Groves, Susie (2012). Developing Mathematical Proficiency. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, 35 (2). 119-145.
- Harper, F. (2012). How One Teacher Uses Complex Instruction to Develop Students' Mathematical Proficiency, *Master of Arts in Education*, Stanford University.
- Jocelyn, B.C, & Nadya, F.S. (2015). Learning proficiency-based teaching and presentation. Retrieved March 3, 2024, from: <https://www.youtube.com/watch?010v-rbxPd85CNC0>.
- Kastberg, Signe & Frye, R Scott. (2013). Norms and Mathematical proficiency. *Teaching Children Mathematics*; Reston, 20(1), Aug, 28.
- Kilpatrick, K., Saafford, J. & Findel, B. (2001). Adding it Up: Helping children learn Mathematics, National Academy Press Washington, DC.
- Ministry of Education, Singapore. (2006). Mathematics Syllabus Primary. Singapore: Curriculum Planning and Development Division. Ministry of Education.
- Moodley, V. G. (2008). A description of mathematical proficiency, in number skills, of grade ten learners in both the Mathematics and Mathematics Literacy cohorts at a North Durban school, (Master Dissertation), Faculty of Education, University of KwaZulu-Natal.

- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA, NCTM.
- National Mathematics Advisory panel (2008). Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory panel. Washington, DC: U.S Department of Education.
- National Research Council. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.
- Samuelsson, Joakim (2010). The Impact of Teaching Approaches on Students' Mathematical Proficiency in Sweden, *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 5 (2). 61-85.
- Stevens, S. A. (2017). The Effects of The Think Interaction Framework as An Intervention to Support Students' engagement in Mathematical Discourse and Movement Toward Mathematical Proficiency. (Doctoral dissertation), Middle Tennessee State University.
- Taylor-Buckner, N. (2014). The effects of elementary departmentalization on mathematics proficiency. (Doctoral dissertation), Teachers College, Columbia University.
- Townsend, B., Lannin, J., & Barker, D. (2009). Promoting efficient strategy use. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14, 542-559.